Terceira Prova de Teoria Electromagnética I, 05/07/2010

Nome: GABARITO

(1ª questão) *(2,0 pontos)* Determine a densidade de corrente $\vec{J}$ que produziria um potencial vetor dado por $\vec{A} = k\hat{\phi}$ (dado em coordenadas cilíndricas), onde k é uma constante.

$$\vec{B} = \vec{\nabla} \times \vec{A} = \frac{1}{s}\frac{\partial}{\partial s}(s A_\varphi) = \frac{1}{s}\frac{\partial}{\partial s}(s k)\hat{z} = \frac{k}{s}\hat{z}$$

Lei de Ampère: $\vec{\nabla} \times \vec{B} = \mu_0 \vec{J} \Rightarrow -\frac{\partial}{\partial s}\overbrace{(k/s)}^{B_z}\hat{\phi} = \mu_0 \vec{J}$

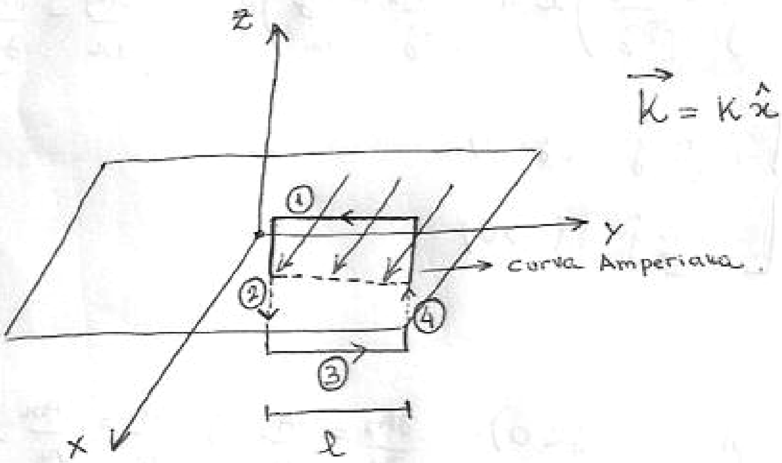
$$\Rightarrow \boxed{\vec{J} = \frac{k}{\mu_0 s^2}\hat{\phi}} \rightarrow \text{Densidade de corrente que produziria } \vec{A} = k\hat{\phi}.$$

(2ª questão) Considere uma densidade superficial de corrente uniforme $\vec{K} = K\hat{x}$, onde K é uma contante, fluindo sobre um plano xy infinito.

(a) *(1,5 pontos)* Determine o campo magnético $\vec{B}$ acima e abaixo do plano. Em particular, justifique a direção obtida para $\vec{B}$.

(b) *(1,5 pontos)* Determine o potencial vetor $\vec{A}$ acima e abaixo do plano. Sugestão: Tente obter $\vec{A}$ diretamente do campo $\vec{B}$ calculado acima. VERIFIQUE AS CONDIÇÕES DE CONTORNO MAGNETOSTÁTICAS P/ $\vec{A}$ e SUA DERIVADA AO CRUZAR A SUPERFÍCIE DE CORRENTE.

a)



Direção de $\vec{B}$: $x \rightarrow B_x = 0$ pois $\vec{B} \perp \vec{K}$

$z \rightarrow B_z = 0$ pois cada filamento [redacted] produz uma componente vertical p/ $\vec{B}$ que é cancelada por um [redacted] filamento simetricamente [redacted] disposto.

$y \rightarrow B_y \neq 0$ pois cada filamento [redacted] produz uma componente y que se soma com a componente y dos filamentos vizinhos. [redacted]
Pela regra da mão direita obtem-se $B_y < 0$ p/ $z > 0$ e $B_y > 0$ p/ $z < 0$.

Assim: $\boxed{\vec{B} = B(z)\,\hat{y}}$

Lei de Ampére: $\oint_C \vec{B}\cdot d\vec{\ell} = \mu_0 I_{enc} \Rightarrow \int_1 \vec{B}\cdot d\vec{\ell} + \cancel{\int_2 \vec{B}\cdot d\vec{\ell}}^{\,0\ (\vec{B}\perp d\vec{\ell})} + \int_3 \vec{B}\cdot d\vec{\ell} + \cancel{\int_4 \vec{B}\cdot d\vec{\ell}}^{\,0\ (\vec{B}\perp d\vec{\ell})} = \mu_0 I_{enc}$

$\Rightarrow B\cancel{\ell} + B\cancel{\ell} = \mu_0 K \cancel{\ell} \Rightarrow \boxed{B = \frac{\mu_0 K}{2}}$ (Módulo de $\vec{B}$)

Em termos vetoriais: $\vec{B} = \begin{cases} \frac{\mu_0 K}{2}\,\hat{y} & (z<0) \\ -\frac{\mu_0 K}{2}\,\hat{y} & (z>0) \end{cases}$

b) Partimos de $\vec{\nabla} \times \vec{A} = \vec{B}$

Em coordenadas retangulares:

$$\vec{\nabla} \times \vec{A} = \left(\frac{\partial A_z}{\partial y} - \frac{\partial A_y}{\partial z}\right)\hat{x} + \left(\frac{\partial A_x}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial x}\right)\hat{y} + \left(\frac{\partial A_y}{\partial x} - \frac{\partial A_x}{\partial y}\right)\hat{z}$$

$$= \begin{cases} \frac{\mu_0 K}{2}\hat{y} & (z<0) \\ -\frac{\mu_0 K}{2}\hat{y} & (z>0) \end{cases}$$

Abaixo do plano $(z<0)$: $\frac{\partial A_z}{\partial y} = \frac{\partial A_y}{\partial z}$; $\frac{\partial A_y}{\partial x} = \frac{\partial A_x}{\partial y}$; $\frac{\partial A_x}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial x} = \frac{\mu_0 K}{2}$

$\Rightarrow$ Podemos escolher: $\boxed{A_x = \frac{\mu_0 K}{2} z \,;\; A_y = 0 \,;\; A_z = 0}$

Acima do plano $(z>0)$: $\boxed{A_x = -\frac{\mu_0 K}{2} z \,;\; A_y = 0 \,;\; A_z = 0}$

Assim: $$\vec{A} = \begin{cases} \frac{\mu_0 K}{2} z\,\hat{x} & (z<0) \\ -\frac{\mu_0 K}{2} z\,\hat{x} & (z>0) \end{cases}$$ ou $\boxed{\vec{A} = -\frac{\mu_0 K}{2}|z|\,\hat{x}}$

Condições de contorno:

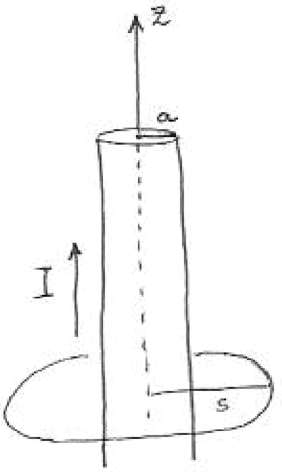
- $\vec{A}_{acima}\Big|_{z\to 0} = \vec{A}_{abaixo}\Big|_{z\to 0} = 0$ ok! $\vec{A}$ é contínuo
- $\frac{\partial \vec{A}_{acima}}{\partial z}\Big|_{z\to 0} - \frac{\partial \vec{A}_{abaixo}}{\partial z}\Big|_{z\to 0} = -\frac{\mu_0 \vec{K}}{2} - \frac{\mu_0 \vec{K}}{2} = -\mu_0 \vec{K}$ ok! condição de descontinuidade p/ a derivada satisfeita

(3ª questão) Uma corrente I flui em um fio infinitamente longo de raio a (assuma que a corrente flui ao longo do eixo z). Se o fio é feito de material linear com susceptibilidade χ_m e a corrente está uniformemente distribuída pelo fio, determine:

(a) *(1,5 pontos)* o campo magnético em uma distância s do eixo.

(b) *(1,5 pontos)* as correntes volumétrica e superficial de magnetização (correntes ligadas).

a)



Lei de Ampère: $\oint \vec{H} \cdot d\vec{l} = I_{f\,enc}$

$$\Rightarrow \quad H\, 2\pi s = \begin{cases} I \dfrac{\cancel{\pi} s^2}{\cancel{\pi} a^2} & (s<a) \\ I & (s>a) \end{cases}$$

$$\Rightarrow \quad H = \begin{cases} \dfrac{I s}{2\pi a^2} & (s<a) \\ \dfrac{I}{2\pi s} & (s>a) \end{cases}$$

Logo: $B = \mu H = \mu_0 (1+\chi_m) H \Rightarrow \vec{B} = \begin{cases} \dfrac{\mu_0 (1+\chi_m) I s}{2\pi a^2}\,\hat{\phi} & (s<a) \\ \dfrac{\mu_0 \cdot I}{2\pi s}\,\hat{\phi} & (s>a) \end{cases}$

(lembrando que fora do fio temos $\chi_m \cong 0$)

b) $\vec{J}_b = \chi_m \vec{J}_f = \chi_m \dfrac{I}{\pi a^2}\hat{z}$ ou $\boxed{\vec{J}_b = \dfrac{\chi_m I}{\pi a^2}\hat{z}}$

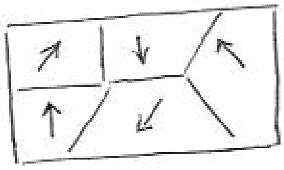
$$\vec{K}_b = \vec{M} \times \hat{n}\Big|_{s=a} = \chi_m \vec{H} \times \hat{n}\Big|_{s=a} = \chi_m \frac{I}{2\pi a}\hat{\phi} \times \hat{s} \Rightarrow \boxed{\vec{K}_b = \frac{\chi_m I}{2\pi a}(-\hat{z})}$$

(4ª questão)

(a) *(1,0 ponto)* Descreva o processo de magnetização permanente de uma amostra ferromagnética em resposta a um campo magnético externo, ou seja, explique em linhas gerais o magnetismo de materiais ferromagnéticos.

(b) *(1,0 ponto)* Represente o processo discutido no item (a) através de uma curva típica de histerese, identificando os pontos de saturação magnética e os eixos coordenados.

a) Um material ferromagnético é composto de domínios ferromagnéticos, os quais são porções relativamente pequenas do material contendo uma enorme quantidade de dipolos magnéticos alinhados em uma direção definida:



(Domínios ferromagnéticos)

→ Temos assim domínios apontando em direções aleatórias, o que não gera uma magnetização em larga escala.

Ao aplicarmos um campo magnético externo o torque $\vec{N} = \vec{m} \times \vec{B}$ tende a alinhar os dipolos de modo paralelo ao campo. O efeito do campo será então o de mover as bordas dos domínios, produzindo domínios cada vez maiores na direção do campo.

Esse processo (movimento de bordas em resposta ao campo) não é reversível: quando o campo é desligado, alguns domínios voltarão a estar aleatoriamente orientados, mas haverá preponderância de domínios na direção original. O objeto será então um magneto permanente.

b)